

Om Lette og Svære Matematiske Problemer

Inden for teoretisk datalogi er forskningsområderne *beregningsteori* og *kompleksitetsteori* særdeles vigtige. Beregningsteori er det ældste af de to forskningsområder og drejer sig om studiet af hvilke problemer, man kan løse på en computer - simple eksempler på sådanne problemer er eksempelvis at sortere en adressebog, at omregne fra kilometer til mil, at beregne gennemsnitlige månedlige udgifter, samt at finde den korteste vej fra Skagen til København. Det vil måske lyde overraskende, at dette forskningsområde er næsten 100 år gammelt, især når man tager i betragtning, at det vi i dag kender som en "computer", ikke eksisterede dengang. Ikke desto mindre kom et historisk bidrag til dette forskningsområde fra den britiske matematiker og filosof Alan Turing allerede i 1936. Dengang var en "computer" en person, hvis arbejde var at lave lange, ensformige beregninger i hånden, idet de ikke havde lommeregnerne til at gøre dette arbejde for dem. Inspireret af hvad disse "computers" lavede, opfandt Turing det matematiske koncept "beregningmaskiner" og gav en beskrivelse af hvordan sådanne beregningmaskiner virker. Og ikke nok med at han beskrev, hvad sådanne beregningmaskiner er, han beviste også, at der findes problemer indenfor teoretisk datalogi, som disse maskiner aldrig vil kunne løse! Det der stadig er så fantastisk ved Turings beregningmaskiner, er hvor præcist de beskriver, hvad moderne computere basalt set er i stand til at beregne. Selvom moderne computere hele tiden bliver hurtigere, får mere hukommelse og bedre grafik, så passer Turings beskrivelse af beregningmaskiner stadig fint på, hvad de i princippet kan beregne - og moderne computere har stadig de begrænsninger, som Turing viste allerede i 1936!

Relateret til forskningsområdet beregningsteori finder man kompleksitetsteori, et område der kun er få årtier gammelt. Inden for dette område fokuserer man udelukkende på de problemer, der *kan* løses på en computer. Men det har vist sig, at bare fordi et problem *i teorien* kan løses på en computer, så betyder det ikke nødvendigvis at det *i praksis* kan løses på en computer. Betragt eksempelvis det (såvel ulovlige som immoralske - men ignorér dette et øjeblik) problem at bryde ind i en anden persons email - dette er "bare" et spørgsmål om at gætte det rigtige kodeord. Man kan nemt sætte en computer til at afprøve samtlige mulige kodeord, indtil den finder det rigtige, så i teorien kan dette problem løses på en computer. Men i praksis vil et *godt valgt* kodeord ikke blive fundet i din levetid på grund af det astronomiske antal forskellige kodeord, som skal afprøves, så det virker overdrevet at påstå, at dette problem kan løses på en computer. Mange interessante problemer i den virkelige verden samt inden for teoretisk datalogi har den uheldige egenskab, at det åbenbart tager så lang tid at løse dem, at vi ikke kan forvente at finde den bedste (nogle gange den eneste) løsning inden for overskuelig tid. Og det er, hvad kompleksitetsteori drejer sig om - at finde ud af hvilke problemer vi kan løse i praksis (de *nemme* problemer), og hvilke vi ikke kan (de *svære* problemer). Eksempler på nemme problemer er de tidligere omtalte problemer: Sortering af data, omregning mellem enheder, beregning af gennemsnitlige udgifter, samt at finde korteste rute mellem to byer. Svære problemer er eksempelvis skemalægning for skoler, beregning af det mindste antal lastbiler krævet for at køre et antal kasser fra én fabrik til en anden, samt at beregne den hurtigste måde for et postbud at tømme samtlige postkasser i Odense, inden posten returneres til det centrale posthus.

Denne ph.d.-afhandling handler om matematiske problemer. Vi studerer adskillige matematiske problemer, og gør dette hovedsageligt fra et kompleksitetsteoretisk synspunkt - det vil sige, vores fokus er på at skille lette matematiske problemer fra svære matematiske problemer. Men klassifikationen af et problem som enten et let problem eller et svært problem er en meget grov klassificering, og i denne ph.d.-afhandling vil vi uddybe denne klassificering og søge at besvare spørgsmål i stil med "præcis hvor let/svært er problemet vi betragter?".

Uffe Flarup
Institut for Matematik og Datalogi
(April 2008)